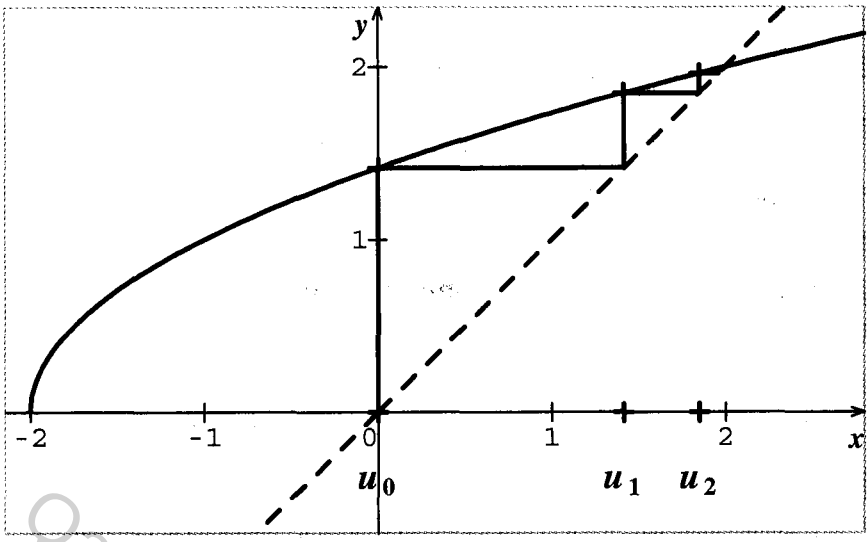
b)



2) Montrons que $U_n \in [0 ; 2]$

On a $U_0 = 0$ vrai

Supposons que $U_n \in [0 ; 2]$ donc $0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \leq 2 + U_n \leq 4 \Rightarrow$

$$0 \leq \sqrt{2 + U_n} \leq 2 \text{ donc } U_{n+1} \in [0 ; 2]$$

3- Montrons que la suite U est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} \geq 0$$

Car $U_n \in [0 ; 2]$ donc U est croissante

***Convergence de la suite U**

U est monotone bornée donc elle est convergente

4-a) Montrons que : $2 - U_n \leq \dfrac{2 - U_{n-1}}{2}$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$; est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + X}} \leq \frac{1}{2}$$

De plus $f(2) = 2$: le théorème des accroissements finis nous

Qarray.tn-Agra Blech-Qarray.tn